

## 2 - SUITES - EXERCICES - CORRECTION

### Exercice 1 :

1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = n + 1 + \frac{1}{n}$ .

La suite  $u$  est définie par une formule explicite.

$$u_3 = 3 + 1 + \frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{4 \times 3 + 1}{3} = \frac{13}{3}.$$

2.  $u_1 = 2$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{u_n}$ .

La suite  $u$  est définie par récurrence.

En posant  $n = 1$ , on a :  $u_2 = 1 + 1 + \frac{1}{u_1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$ .

En posant  $n = 2$ , on a :  $u_3 = 2 + 1 + \frac{1}{u_2} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$ .

3.  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{u_n}$ .

La suite  $u$  est définie par récurrence.

En posant  $n = 0$ , on a :  $u_2 = u_1 + \frac{1}{u_0} = 2 + \frac{1}{1} = 2 + 1 = 3$ .

En posant  $n = 1$ , on a :  $u_3 = u_2 + \frac{1}{u_1} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$ .

### Exercice 2 :

1.  $u_n = 3n + 1$ .

a)  $u_{n+1} = (3n + 1) + 1 = 3n + 2$ .

$u_{n+1} = 3(n + 1) + 1 = 3n + 3 + 1 = 3n + 4$ .

b)  $u_{n+1} - u_n = (3n + 4) - (3n + 1) = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 3 > 0$ . Donc la suite  $u$  est (strictement) croissante.

2.  $u_n = n^2$ .

a)  $u_{n+1} = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ .

$u_{n+1} = (n + 1)^2$ .

b)  $u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$ , car  $n \geq 0$ . Donc la suite  $u$  est (strictement) croissante.

3.  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ .

a)  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ .

$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ .

b)  $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ , car  $n > 0$ . Donc la suite  $u$  est (strictement) décroissante.

### Exercice 3 :

a)  $u_n = \frac{1-n}{1+n}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1-(n+1)}{1+(n+1)} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n}{2+n} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n(1+n) - (1-n)(2+n)}{(2+n)(1+n)} = \frac{-n-n^2 - (2+n-2n-n^2)}{(2+n)(1+n)} \\&= \frac{-n-n^2-2-n+2n+n^2}{(2+n)(1+n)} = \frac{-2}{(2+n)(1+n)}.\end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2+n)(1+n)} < 0$ , car  $n \geq 0$ . Donc la suite  $u$  est (strictement) décroissante.

b)  $u_n = n^2 - 5n$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= ((n+1)^2 - 5(n+1)) - (n^2 - 5n) = (n^2 + 2n + 1 - (5n + 5)) - n^2 + 5n = n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 - n^2 + 5n \\&= 2n - 4.\end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow 2n - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2n \geq 4 \Leftrightarrow n \geq 2.$$

Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $u_{n+1} - u_n = 2n - 4 \geq 0$ . Donc la suite  $u$  est croissante à partir de  $n = 2$ .

c)  $u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} - 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2-3}{3} \\&= 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{-1}{3} = -5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = -5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} < 0$ . Donc la suite  $u$  est (strictement) décroissante.

### Exercice 4 :

1.  $u_n = 3n + 1$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = (3n + 4) - (3n + 1) = 3n + 4 - 3n - 1 = 3.$$

La suite  $u$  est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme  $u_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$ .

2.  $v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :

$$v_{n+1} = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} = v_n \times \frac{2}{3}.$$

La suite  $v$  est donc géométrique de raison  $\frac{2}{3}$  et de premier terme  $v_0 = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 5 \times 1 = 5$ .

### Exercice 5 :

1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :  $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \frac{q}{10} u_n + 2 - 20 = \frac{q}{10} u_n - 18$ .

Or :  $v_n = u_n - 20$ , donc :  $u_n = v_n + 20$ .

On a donc :  $v_{n+1} = \frac{q}{10} (v_n + 20) - 18 = \frac{q}{10} v_n + \frac{q}{10} \times 20 - 18 = \frac{q}{10} v_n + \frac{q}{10} \times 2 \times 10 - 18 = \frac{q}{10} v_n + 18 - 18 = \frac{q}{10} v_n$ .

La suite  $v$  est donc géométrique de raison  $q = \frac{q}{10}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$ .

2. On a donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\frac{q}{10}\right)^n$ .

On en déduit enfin que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = v_n + 20 = 10 \left(\frac{q}{10}\right)^n + 20$ .

### Exercice 6 :

1. La suite  $u$  est géométrique de raison  $q = \frac{2}{3}$ , donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :  $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

2. 
$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^0 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \left( \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$$
$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 6 \left( 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right).$$

3. Or :  $0 \leq \frac{2}{3} < 1$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ . On en déduit que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6 \times (1 - 0) = 6$ .